Tillbakablick

Ekvationssystem

$$A\bar{x}=\bar{b}$$

koefficientmatris

högerled

nov 16-12:58

Totalmatris

$$(A \mid \bar{b})$$

Löste med hjälp av
<u>radoperationer</u>

Algoritm;
Gausselimination
(Gauss-Jordan)

nov 16-12:58

Gausselimination

$\rightsquigarrow$ trappform

Gauss-Jordan

$\rightsquigarrow$ reducerad trappform

(nollor ovanför de ledande ettorna)

nov 16-12:58

Skillnad mot boken;

här hade vi

ledande ettor

i boken

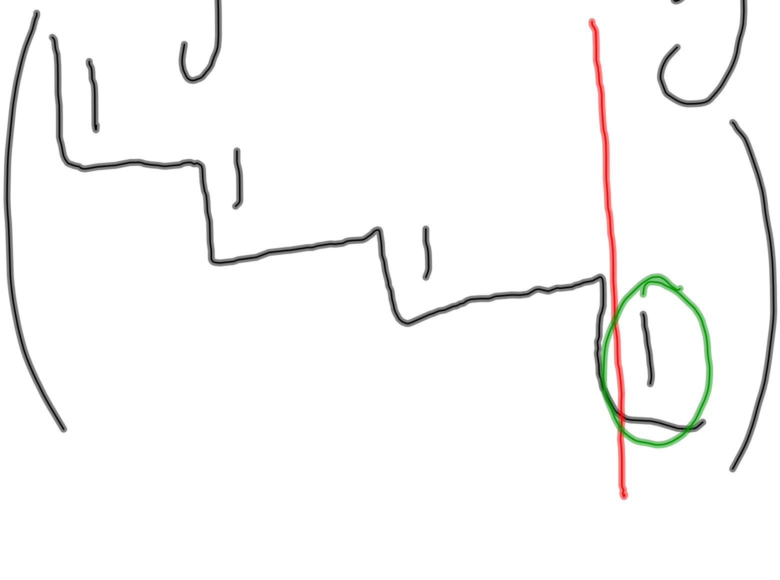
"pivotelement"

(kan vara $\neq 1$)

nov 16-12:58

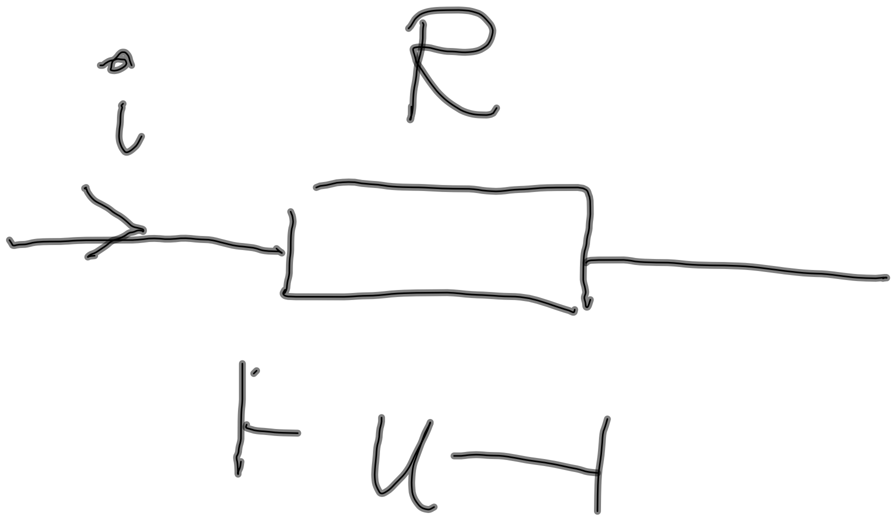
Olika lösningsmängder

- en unik lösning
- oändligt många (införa parametrar)
- ingen lösning alls



nov 16-12:58

Exempel



nov 16-12:58

Tre mätningar

$(u_1, i_1) \rightsquigarrow \dfrac{u_1}{i_1}$

$(u_2, i_2) \rightsquigarrow \dfrac{u_2}{i_2}$

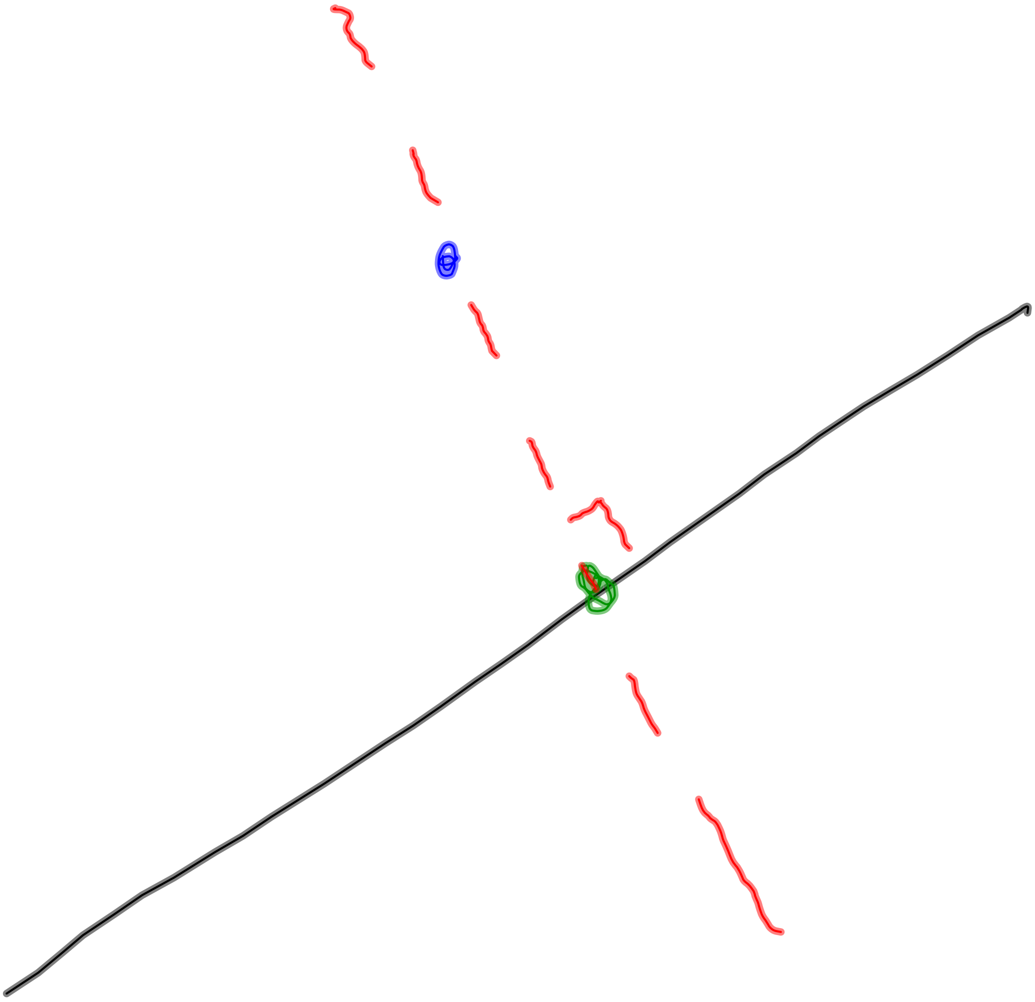
$(u_3, i_3) \rightsquigarrow \dfrac{u_3}{i_3}$

Naivt: Ta medelvärdet

$$R \approx \frac{1}{3}\left(\frac{u_1}{i_1} + \frac{u_2}{i_2} + \frac{u_3}{i_3}\right)$$

nov 16-12:58

Närmast



nov 16-13:20

$$\begin{cases} i_1 R = u_1 \\ i_2 R = u_2 \\ i_3 R = u_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} i_1 & u_1 \\ i_2 & u_2 \\ i_3 & u_3 \end{array}\right)$$

nov 16-13:21

eller

$$\begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{i}_2 \\ \bar{i}_3 \end{pmatrix}(R) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

nov 16-13:22

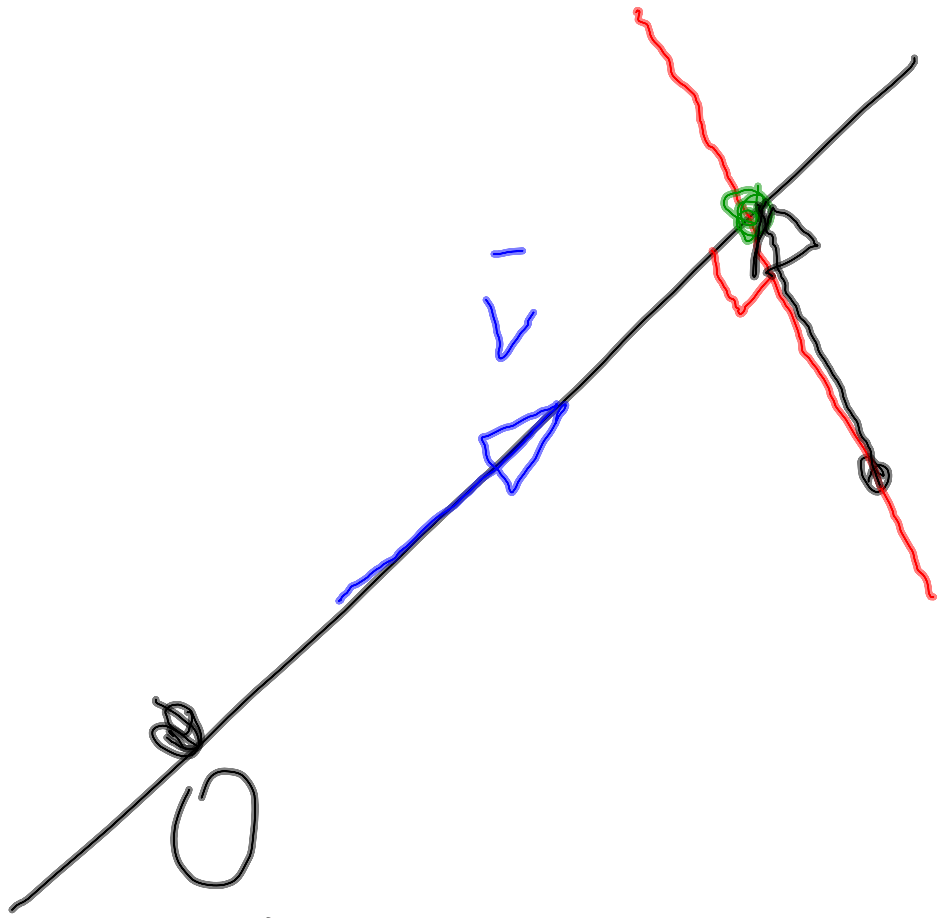
Vänsterled är en linje med riktningsvektor

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}$$

nov 16-13:23

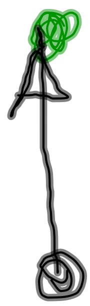
Vill hitta en punkt på linjen som ligger så nära $\underline{b} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ som möjligt.

nov 16-13:24



O

$R \cdot \bar{v}$



$\bar{b}$ skillnaden

$R\bar{v} - \bar{b}$ ska vara ortogonal mot $\bar{v}$

nov 16-13:25

$$(R\bar{v}-\bar{b})\circ\bar{v}=0$$

$$(R_{i_1}-u_1, R_{i_2}-u_2, R_{i_3}-u_3)\circ(i_1, i_2, i_3)$$

$$=(R\bar{i}_1-u_1)\bar{i}_1+(R\bar{i}_2-u_2)\bar{i}_2+(R\bar{i}_3-u_3)\bar{i}_3$$

nov 16-13:28

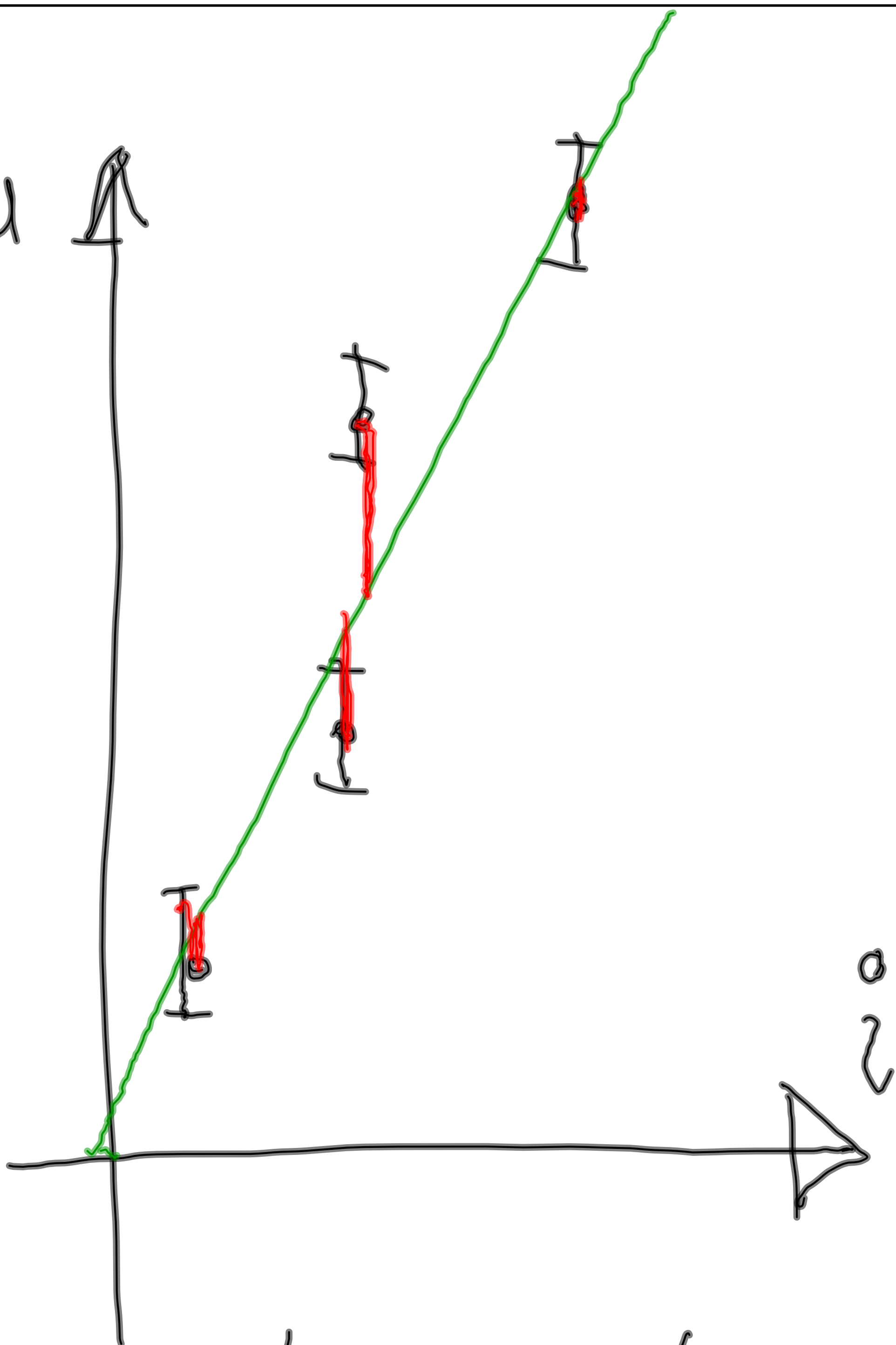
$$= R\left(\dot{i}_1^2 + \dot{i}_2^2 + \dot{i}_3^2\right)$$

$$- u_1 \dot{i}_1 - u_2 \dot{i}_2 - u_3 \dot{i}_3$$

Vill att detta ska vara noll!

$$R = \frac{u_1 \dot{i}_1 + u_2 \dot{i}_2 + u_3 \dot{i}_3}{\dot{i}_1^2 + \dot{i}_2^2 + \dot{i}_3^2}$$

nov 16-13:30



Minsta kvadrat

nov 16-13:37

betyder minsta
summan av
kvadraterna av
avvikelserna.

nov 16-13:39

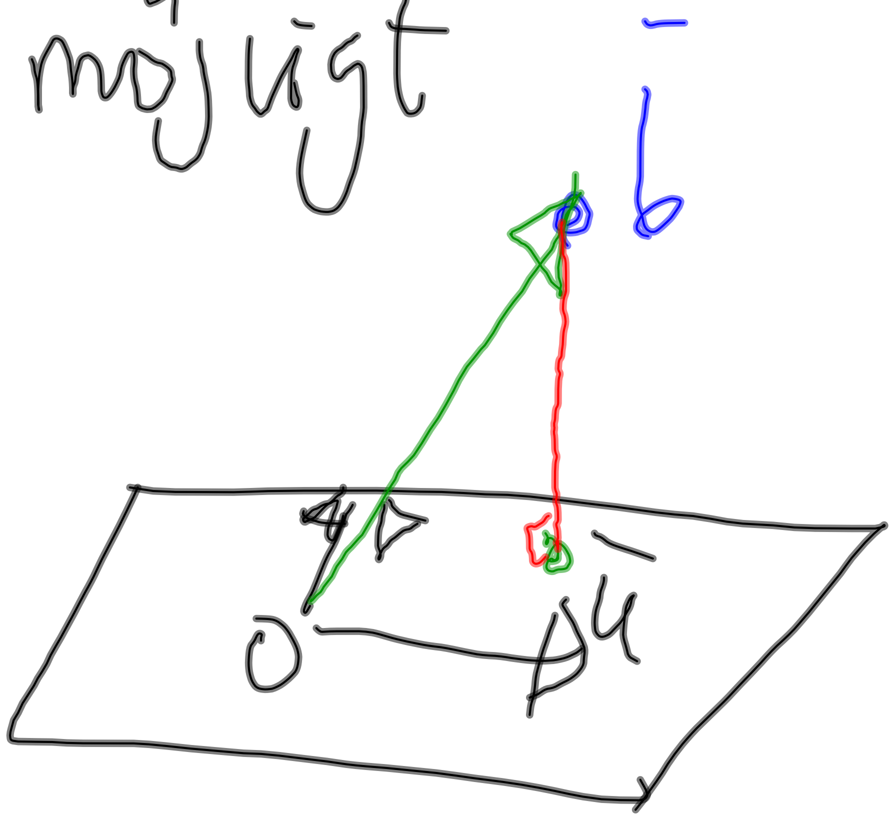
Två variabler

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3 \end{cases}$$

$$x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

nov 16-13:41

Vi vill hitta punkt i planet som ligger så nära $\bar{b}$ som möjligt



nov 16-13:42

Avvikelsen

$\bar{b} - x\bar{u} - y\bar{v}$

ska vara ortogonal mot planet, dvs ortogonal mot både $\bar{u}$ och $\bar{v}$

nov 16-13:44

Vi får två ekvationer

$$\begin{cases} \bar{u} \cdot (x\bar{u} + y\bar{v} - \bar{b}) = 0 \\ \bar{v} \cdot (x\bar{u} + y\bar{v} - \bar{b}) = 0 \end{cases}$$

nov 16-13:46

$$\begin{cases} \bar{u}\circ\bar{u}\,x+\bar{u}\circ\bar{v}\,y=\bar{u}\circ\bar{b} \\ \bar{v}\circ\bar{u}\,x+\bar{v}\circ\bar{v}\,y=\bar{v}\circ\bar{b} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{u}\circ\bar{u} & \bar{u}\circ\bar{v} \\ \bar{v}\circ\bar{u} & \bar{v}\circ\bar{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \bar{u}\circ\bar{b} \\ \bar{v}\circ\bar{b} \end{pmatrix}$$

nov 16-14:10

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} - & \bar{u}^t & - \\ - & \bar{v}^t & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | \\ \bar{u} & \bar{v} \\ | & | \end{pmatrix}$$

nov 16-14:10

Samma sak som att multiplicera hela det ursprungliga system

$$A\bar{x}=\bar{b}$$

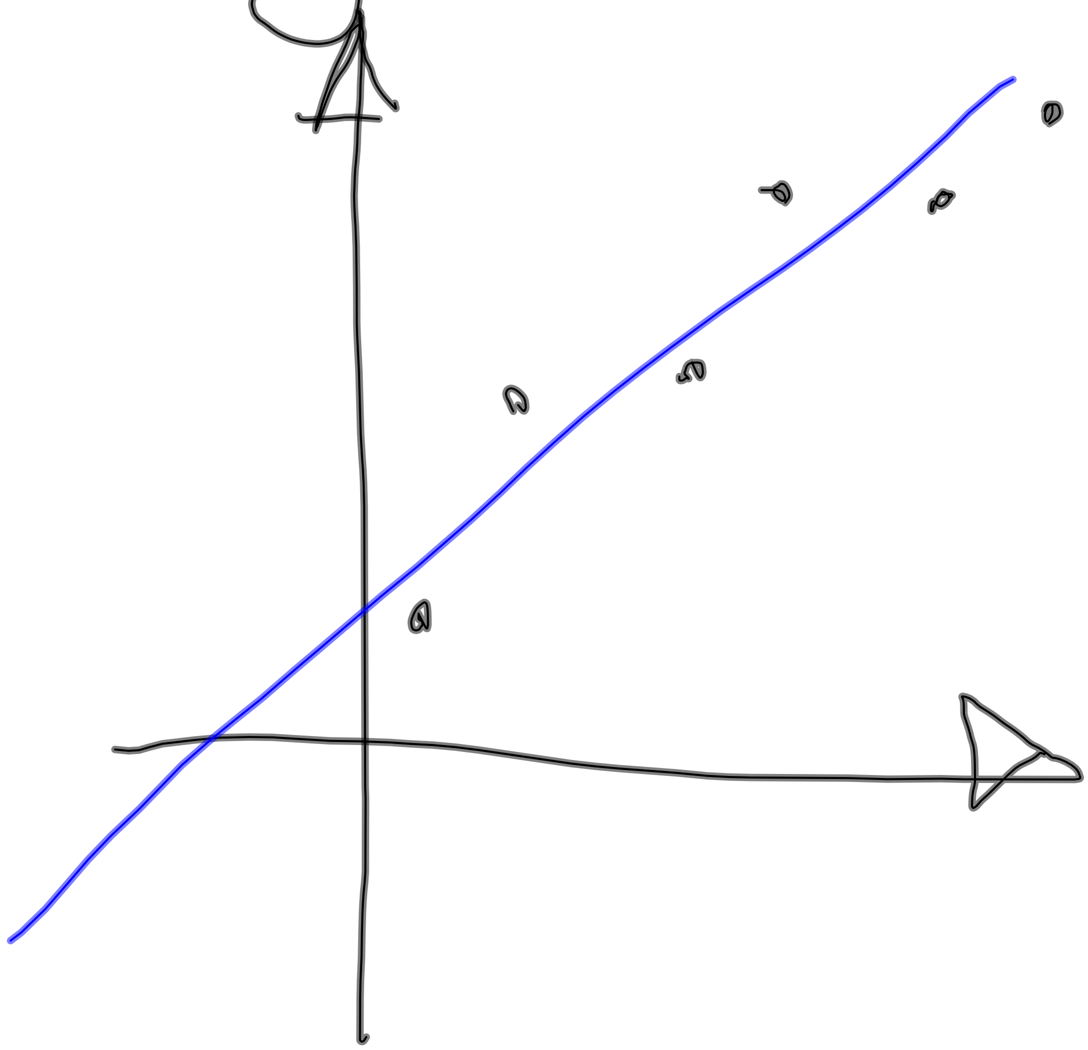
med A^t till vänster

$$\rightarrow A^tA\bar{x}=A^t\bar{b}$$

nov 16-14:14

Anpassa linje

$$y = kx + l$$



nov 16-14:16

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n & n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

nov 16-14:18

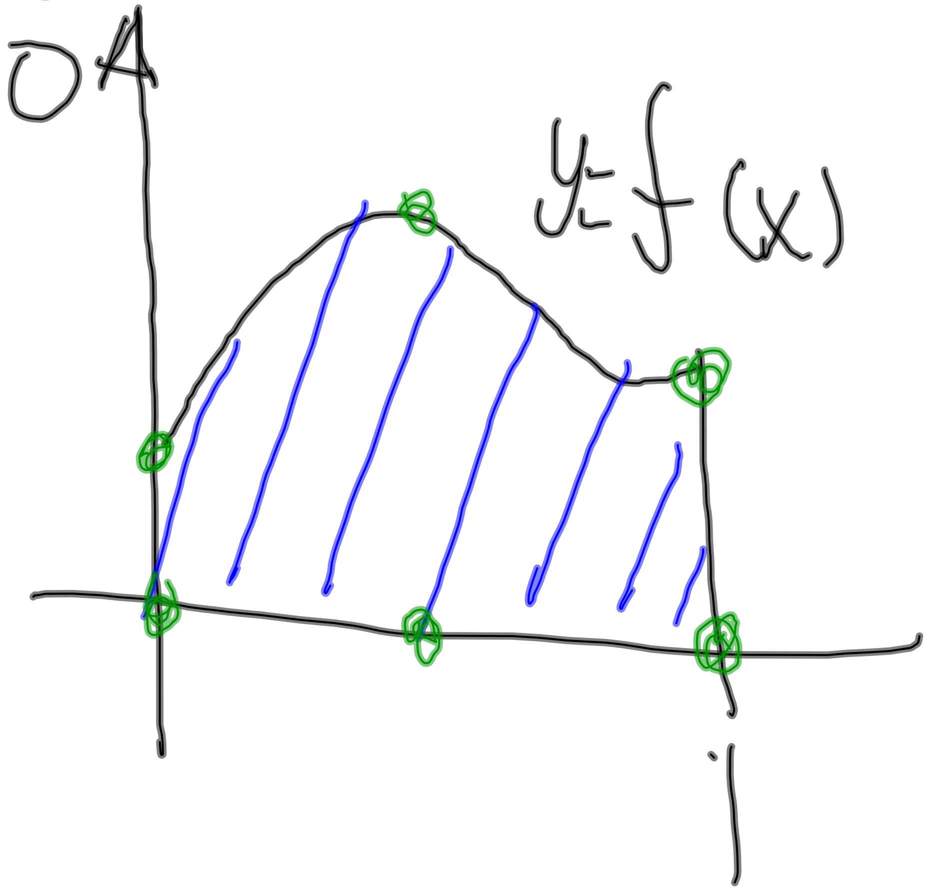
$$\begin{pmatrix} x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n \\ y_1+y_2+\dots+y_n \end{pmatrix}$$

nov 16-14:20

Exempel

Integralet

$\int f(x)\,dx$



nov 16-14:25

Försök approximera

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

med

$$af(0)+bf(0,5)+cf(1)$$

nov 16-14:26

Börja med enkla funktioner

$f(x)=1$, $f(x)=x$

$f(x)=x^2$, $f(x)=x^3$

$$\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0 = \frac{1}{n+1}$$

nov 16-14:28

Om a, b, c ger rätt svar för 1, x, x^2, och x^3

så är

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 0 \cdot a + 0{,}5b + c = \frac{1}{2} \\ 0 \cdot a + (0{,}5)^2 b + c = 1/3 \\ 0 \cdot a + (0{,}5)^3 b + c = 1/4 \end{cases}$$

nov 16-14:28

Totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

nov 16-14:32

Vi kan skriva upp normal-ekvationen:

$$A^t A\bar{x} = A^t\bar{b}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 85/64 & 15/8 \\ 1 & 15/8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 131/96 \\ 25/12 \end{pmatrix}$$

nov 16-14:34

Vi kan lösa
med Gausselimination

Matlab ger

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 2/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

nov 16-14:36